弱Konigの補題,弱弱Konigの補題の一様版 (シークエント計算による証明論)

数理解析研究所講究録 1301 巻 2003 年 84-91

弱Königの補題，弱弱Königの補題の一様版

東北大学大学院理学研究科数学専攻
坂本 伸幸 (SAKAMOTO, Nobuyuki)

概要

高階算術の枠組みにおいて，適当な base theory のもとで，弱 König の補題の一様版は $\exists\varphi^2\forall f^1(\varphi f=0\leftrightarrow\exists x^0(fx=0))$ なる公理 $(\exists^2)$ と同値であるという Kohlenbach の結果を精密化した．また，弱 König の補題の代わりに弱弱 König の補題の一様版を考えても同じ強さになることを示した．

1 導入

逆数学プログラムとは2階算術という枠組みの中で個々の数学の定理の証明に必要な内包公理は何かを調べようという研究である．この研究の中で，弱 König の補題（WKL）なる公理は重要な位置を占める．

WKL とは，無限 0-1 木（$0,1$ の有限列からなる無限木）は道を持つという公理である．2 階算術の標準的な base theory である RCA_0 上，WKL は Heine/Borel の被覆定理，Brower の浮動点定理，閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数は最大値を持つという定理など多くの定理と同値になることが知られている．また，RCA_0に WKL を加えた体系 WKL_0は

- （Friedman）Π^0_2文に関して PRA の保存的拡大であること，
- （Harrington, Simpson, Tanaka, Yamazaki）$\forall X\exists!Y\varphi(X,Y)$（$\varphi$ は算術的）という形の文に関して RCA_0の保存的拡大であること．

が知られている．

また，WKL_0より真に弱い体系 WWKL_0の研究も幾らかなされている．ここに WWKL_0 は RCA_0に「枝の多い」木は道を持つことを主張する弱弱 König の補題（WWKL）を加えたものである（WWKL の詳しい定義は 2 節を参照）．WWKL は RCA_0上，

Vitali の被覆定理，Compact 距離空間上の Borel 測度は可算加法的という定理などと同値になることが知られている.

近年 Kohlenbach は，高階算術の枠組みにおいて WKL の一様版，すなわち任意の無限二分木に対してその道を返す汎関数の存在を主張する公理を考えると，これは本質的に WKL より強くなることを発見した [4]. 本質的に強い，の意味をもう少し詳しく言えば，適当な base theory にこの公理を加えた体系は算術的論理式に関して PA の保存的拡大になるということ（したがってΠ^0_2文に関して PRA の保存的拡大にはなっていない）である.

本論文では，この Kohlenbach の結果を精密化し，簡潔な証明を与えた．さらに，WWKL の一様版も WKL の一様版と同じ強さとなることを示した. WKL は WWKL より真に強かったのだから，この結果はそう自明ではないであろう．ここで，本論文執筆にあたり，多くの助言を与えて下さった山崎武氏（現大阪府立大学助手）に謝意を表したい.

2　2階算術における弱 König の補題

まず, 2 階算術の説明を簡単に行う．2 階算術の詳細については [5] を参照.

定義 2.1 ($\mathcal{L}_2$). 2 階算術の言語$\mathcal{L}_2$は，数変数$x, y, z, \ldots$ と集合変数$X, Y, Z, \ldots$を持つ 2 領域言語で，定数記号に$0, 1$，演算記号に$+, \cdot$，関係記号に$<$をもつものである.

定義 2.2 (論理式の階層). Σ^0_0論理式とは，含まれる量化記号がすべて$\forall x < t, \exists x < t$ (x は数変数，t は x を含まない数項）の形である論理式のこととする．Σ^0_{n+1}論理式とは，あるΠ^0_n論理式 $A(x)$ があって，$\exists x A(x)$ と書けるものとする．ただし，$A(x)$ はパラメータ（x 以外の自由変数）を含んでよい．以下同様. Π^0_{n+1}論理式とは，あるΣ^0_n論理式 $A(x)$ があって，$\forall x A(x)$ と書けるものとする．Σ^1_0論理式とは，ある自然数 n に対してΣ^0_n論理式となる論理式のこととする．Σ^1_0論理式のことをΠ^1_0論理式とも呼ぶ．Σ^1_{n+1}論理式とは，あるΠ^1_n論理式 $A(X)$ があって，$\exists X A(X)$ と書けるものとする．Π^1_{n+1}論理式とは，あるΣ^1_n論理式 $A(X)$ があって，$\forall X A(X)$ と書けるものとする．$i = 0, 1, j = 0, 1, \ldots$ に対し，Σ^i_j論理式，Π^i_j論理式全体の集合をそれぞれΣ^i_j，Π^i_jで表す.

定義 2.3 (RCA_0). RCA_0は言語$\mathcal{L}_2$を持つ体系で，公理として$(\omega, +, \cdot, 0, 1, <)$に関す

る離散順序半環の公理（ここに，ωは自然数全体の集合を表す）とΣ^0_1帰納法

$$A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x+1)) \to \forall x A(x)$$

（A はΣ^0_1論理式）とΔ^0_1内包公理

$$\forall n(A(n) \leftrightarrow B(n)) \to \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow A(n))$$

（A はΣ^0_1論理式，B はΠ^0_1論理式で X が自由に現れない）を持つ体系とする．

RCA_0において，2個の自然数のペアを1個の自然数によってコード化できる．ペア i, j のコードを $\langle i, j \rangle$ とする．また，自然数の有限列もコード化できる．有限列 $s_0, s_1, \ldots, s_n$のコードを $\langle s_0, s_1, \ldots, s_n \rangle$ で表す．有限列のコード全体を Seq で表し，特に 0, 1 だけからなる有限列のコード全体を Seq_2で表す．以降，有限列とそのコードを同一視する．$(s)_i$で有限列 s の $i+1$ 番目の要素を表す．すなわち，

$$s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n \rangle$$

であるとき，$(s)_i = s_i$である．また，$\mathrm{lh}(s)$ で有限列 s の長さを表す．集合 X と自然数 i に対し，集合 $(X)_i$を

$$(X)_i = \{n : \langle i, n \rangle \in X\}$$

で定める．

さて，本論文でもっとも重要な概念である弱 König の補題と弱弱 König の補題を定義する．

定義 2.4 (WKL, WWKL). 0-1 木とは，始切片で閉じている Seq_2の部分集合である．$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が 0-1 木 T の道であるとは，$\forall n \langle f(0), f(1), \ldots, f(n) \rangle \in T$ なることをいう．0-1 木 T が繁っているとは，

$$\exists m \forall n \# \{\sigma \in T : \mathrm{lh}(\sigma) = n\} > 2^{n-m}$$

なることをいう．ここに，$\#A$ は集合 A の濃度を表す．

弱 König の補題とは，任意の無限 0-1 木は道を持つという主張である．弱弱 König の補題とは，任意の繁った 0-1 木は道を持つという主張である．

弱Königの補題のことを単にWKLとも書き弱弱Königの補題のことを単にWWKLとも書く．RCA_0にWKLを加えた体系をWKL_0で表す．

2階算術におけるWKLの一様版に関して，次がわかる．

定理 2.5. RCA_0上，以下の主張は同値．

(1) WKL.

(2) $\forall X \exists Y \forall n((X)_n$が無限0-1木 $\rightarrow (Y)_n$は$(X)_n$の道$)$.

(3) $\forall X(\forall n(X)_n$は無限0-1木 $\rightarrow \exists Y \forall m(Y)_m$は$(X)_m$の道$))$.

証明 (2)→(3), (3)→(1), は明らか．

(1)→(2)．WKL_0から強Π^0_1従属選択公理が導かれる（[5] の定理 VIII.2.5.）ことから，特にWKL_0で強Π^0_1 選択公理

$$\exists Z \forall n \forall U(A(n,U) \rightarrow A(n,(Z)_n))$$

（AはΠ^0_1論理式で，Z以外の変数関数をパラメータとして含んでよい）が証明できることがわかる．この$A(n,U)$として「Uは$(X)_n$の道である」ことを表すΠ^0_1論理式をとればよい． □

3 高階算術における弱Königの補題，弱弱Königの補題

まず，高階算術の説明を簡単に行う．高階算術の詳細については [2] 等を参照．

高階算術の体系 E-PRA^ωは，型は射型（型0から→のみを用いて組み立てられる型）のみを持ち，各型δ,ρ,τに対し，combinator $\Pi_{\rho,\tau}, \Sigma_{\delta,\rho,\tau}$ とその定義公理，Kleeneの意味での原始再帰的汎関数（記号），すなわち原始再帰法を型0においてのみ許して得られる原始再帰汎関数とその定義公理，量化記号のない論理式に対する帰納法

$$A_0(0) \wedge \forall x^0(A_0(x) \rightarrow A_0(x+1)) \rightarrow \forall A_0(x)$$

（ここにA_0は量化記号のない論理式），各型ρ,τに対する外延性の公理

$$(E): \forall x^\rho \forall y^\rho \forall z^{\rho\rightarrow\tau}(x =_\rho y \rightarrow zx =_\tau zy)$$

をもつものとして定義される．ただし，この体系がもつ等式は型0における等号$=_0$のみであって，型$\rho = \rho_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \rho_k \rightarrow 0 \neq 0$における等号$x =_\rho y$は

$\forall z_1^{\rho_1} \cdots \forall z_k^{\rho_k}(xz_1 \cdots z_k =_0 yz_1 \cdots z_k)$ と$=_0$を用いて定義されるものである．さらに，あまり一般的な流儀ではないが，型 0 の object と型 1 の object の間の関係記号 $\in$ とその定義公理

$$x^0 \in f^1 \Leftrightarrow fx > 0$$

も加えておく．

combinator を用いることによってλ適用が定義できる．

量化記号なしの論理式に対する選択公理図式は

$$\text{QF-AC}^{\rho,\tau} : \forall x^\rho \exists y^\tau A_0(x,y) \to \exists Y^{\rho\to\tau} \forall x^\rho A_0(x, Yx)$$

（A_0は量化記号なし）と定義される．

定理 3.1. E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{0,0}, E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{1,0}は RCA$_0$の保存的拡大である．

証明 [3] 参照．

これと定理 2.5 より，次の定理を得る．

定理 3.2. E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{0,0} + WKL で，

$$\forall f^{0\to 1} \exists g^{0\to 1} \forall n^0 (fn \text{ は無限 2 分木} \to gn \text{ は } fn \text{ の無限道})$$

が証明できる． □

すなわち，可算個の集合に対する一様弱 König の補題を自然に記述した主張は E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{0,0}上 WKL と同値になるのである．では，非可算個の集合に対する一様弱 König の補題の強さはどうであろうか．実は，これは WKL より真に強くなるのである．それをこれから見ていこう．

定義 3.3. 公理 $(\exists^2)$ を

$$\exists \varphi^2 \forall f^1 (\varphi f = 0 \leftrightarrow \exists x^0 (fx = 0))$$

で定義する．

E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{0,0} + $(\exists^2)$ はΠ^1_2文に関して ACA$_0$ の保存的拡大（特にペアノの算術 PA の保存的拡大）であることが知られている（[1]Theorem 8.3.4. 参照）．

定理 3.4. E-PRA$^\omega$上，以下は同値.

(1) $(\exists^2)$,

(2) $\exists\psi^{1\to 1}\forall f^1(f$ は無限 0-1 木 $\to \psi f$ は f の道$)$,

(3) $\exists\psi^{1\to 1}\forall f^1(f$ は繁った 0-1 木 $\to \psi f$ は f の道$)$,

(4) $\forall\delta^{1\to 1}(\forall f^1(\delta f$ は無限 0-1 木$) \to \exists\gamma^{1\to 1}\forall g^1(\gamma g$ はδg の道$))$,

(5) $\forall\delta^{1\to 1}(\forall f^1(\delta f$ は繁った 0-1 木$) \to \exists\gamma^{1\to 1}\forall g^1(\gamma g$ はδg の道$))$,

(6) $\forall h^{0\to 1}(\forall n^1(hn$ は無限 0-1 木$) \to \exists\beta^{1\to 1}\forall m^0(\beta(hm)$ は hm の道$))$,

(7) $\forall h^{0\to 1}(\forall n^1(hn$ は繁った 0-1 木$) \to \exists\beta^{1\to 1}\forall m^0(\beta(hm)$ は hm の道$))$,

(8) $\exists\psi_B^{1\to 1}\forall f^1(B(f) \to \psi_B f$ は f の道$)$.

ここに (8) の B は,

$$B(f) \equiv f \text{ は繁った 0-1 木} \wedge \forall n^0(n \in f \leftrightarrow \langle\overbrace{(n)_0,\ldots,(n)_0}^{\mathrm{lh}\,n \text{ times}}\rangle \in f)$$

で定義される論理式である.

この定理の (1) と (2) の同値性は Kohlenbach[4] によって証明されている.

定理 3.4 の証明 $(\exists^2)$ を用いることによって，与えられた無限 2 分木の最左道を求めることができる．したがって (1)→(2) は成り立つ．(2)→(3), (2)→(4), (4)→(5), (2)→(6), (6)→(7), (7)→(8) は明らかであろう．あとは (5)→(8), (8)→(1) を示せばよい.

(5)→(8) 与えられた型 1 の object f^1を

$$\begin{aligned} n^0 \in g \Leftrightarrow n \in \mathrm{Seq}_2 \wedge (\exists m^0(\mathrm{lh}(m) = \mathrm{lh}(n) \wedge (m)_0 = (n)_0 \wedge m \in f) \\ \vee \forall l^0(\mathrm{lh}(l) = \mathrm{lh}(n) \wedge (l)_0 \neq (n)_0 \to l \notin f)) \end{aligned}$$

なる型 1 の object g^1に書き換える変形は原始再帰的であるから，この変形を実現する閉項γが存在する．$\forall f^1 B(\gamma f)$ であるから，(5) によってγの道の族βがとれる．$\forall f(B(f^1) \to \gamma f = f)$ であるから，$B(f)$ なる f に対しては$\psi_B f$ は f の道になっている.

(8)→(1) 与えられた型 1 の object f^1を

$$n^0 \in g \Leftrightarrow n \in \mathrm{Seq}_2 \wedge (\psi_B \mathrm{Seq}_2 0 \neq (n)_0 \vee \forall i < \mathrm{lh}(n)(fi > 0)))$$

なる型 1 の object g^1 に書き換える変形は原始再帰的であるから，この変形を実現する閉項τがとれる．これを用いて，φ^2を$\varphi = \lambda f^1.((\psi_B b0)\,\mathtt{xor}\,(\psi_B(\tau f)0))$（ここに，$\mathtt{xor}$ は，$m\,\mathtt{xor}\,n = 0 \Leftrightarrow mn > 0 \vee (m = 0 \wedge n = 0)$ を成り立たせる原始再帰的関数）で定めれば，φ は所要の条件を満たす． □

定理 3.2 と定理 3.4(6) を比較せよ．可算一様弱 König の補題を，道の族を型 2 の object で表すことにすると，E-PRA$^\omega$上真に強い主張になるのである．では，定理 3.4(4) の「有限版」の強さはどうなるのであろうか．実は，これは E-PRA$^\omega$上 WKL と同値になるのである．

定理 3.5. E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{0,0}上，

$$\forall h^{0\to 1}(\forall n^1 hn \text{ は無限 2 分木} \to \forall i^0 \exists \beta^{1\to 1} \forall m^0 < i \beta(hm) \text{ は } hm \text{ の道}.$$

は WKL と同値．

この定理の証明のために次の補題が必要になる．

補題 3.6. E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{0,0}で

$$\forall f^{0\to 1} \forall i^0 \exists x^0 \forall m^0 < i(\exists n^0(fmn = 0) \to fm((x)_m) = 0$$

が証明できる．

証明 定理 3.1 より，RCA$_0$で

$$\forall X \forall i \exists x \forall m < i(\exists n(n \in (X)_m) \to (x)_m \in (X)_m)$$

が証明できることを示せば十分．これはΣ^0_1帰納法で証明できる． □

定理 3.5 の証明 与えられた f に対し，定理 2.5 と定理 3.1 より $g^{0\to 1}$で，各 n^0に対し gn は fn の道になっているものがとれる．i^0を固定する．$l = \max_{j,k<i}\langle j,k\rangle + 1$ とおく．前の補題より，$\forall j < i \forall k < i(\exists u(fju\,\mathtt{xor}\,fku = 1) \to fj(x)_{\langle j,k\rangle}\,\mathtt{xor}\,fk(x)_{\langle j,k\rangle} = 1)$ なる x^0がとれる．$h = \lambda k.(\mu j < l.(\forall k < l(fj(x)_{\langle j,k\rangle} = fk(x)_{\langle j,k\rangle})))$ とおく．ここに，$\mathtt{xor}$ は 3.4 の証明で定義した $\mathtt{xor}$ であり，$\mu j < l.F(j)$ は $F(j) \vee j \geq l$ を成り立たせる最小の自然数 j を表す．$\beta = \lambda k.g(hk)$ とおけば，βは所要の条件を満たす． □

参考文献

[1] J. Avigad and S. Friedman. Gödel's functional("dialectica") interpretation. In S. R. Buss, editor, *Handbook of Proof Theory*, chapter 5. Elsevier Seience, 1998.

[2] J. Barwise, editor. *Handbook of Mathematical Logic.* Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. North-Holland, 1977.

[3] U. Kohlenbach. Higher order reverse mathematics. In S. G. Simpson, editor, *Reverse Mathematics.* To appear.

[4] U. Kohlenbach. On the uniform weak könig lemma. *Annals of Pure and Applied Logic(sepcial issue in honor of Professor A. S. Troelstra).* To appear.

[5] S. G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.